Egzamin z **analizy matematycznej II.2**

24 czerwca 2023, 10:00 - 13:00

Rozwiązanie każdego zadania należy umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.
Maksimum punktów możliwych do uzyskania za egzamin: 100.

---

1. (25p) Niech $\gamma(t) = (t,\, t(1-\cos t),\, t\sin t)$ dla $t \in [0,\, 2\pi]$ i $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$. Obliczyć całkę
$$\int_\Gamma (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z,$$
przyjmując orientację zgodną z parametryzacją γ.

---

2. (25p.) Niech $M = \{(u\cos v, u\sin v, v), \quad u \in (-1,1), \quad v \in (-\pi,\pi).\}$
Obliczyć
(a) $\int_M f d\sigma_M$, gdzie f przyporządkowuje punktowi z M jego odległość od osi $\{x = y = 0\}$.
(b) $\int_M \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ dla orientacji M zgodnej z podanym opisem parametrycznym.

---

3. (25p.) Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, klasy C^1 na (a,b), która spełnia warunek $\lim_{x\to a^+} f'(x) = -\lim_{x\to b^-} f'(x) = +\infty$.
Załóżmy, że $\omega_1, \omega_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami klasy C^1, a M powierzchnią powstałą przez obrót wykresu funkcji $x = f(z)$ dla $z \in (a,b)$, wokół osi $\{x = y = 0\}$. Niech ω będzie 2-formą na $\mathbb{R}^3$:
$$\omega = \omega_1(y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \omega_2(x,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$
Wykaż, że wartość całki
$$\int_M \omega$$
zależy tylko od wartości funkcji f w punktach a, b oraz przyjętej orientacji powierzchni M. Oblicz tę całkę dla orientacji M dziedziczonej z dodatniej orientacji $\mathbb{R}^3$, $a = 1$, $b = 2$ $f(z) = z^2\sqrt{(z-1)(2-z)} + 3 + z$.

---

4. (25p) Niech $A \subset [0,1]$ będzie zbiorem λ_1-mierzalnym. Dla każdego $a \in A$ oznaczmy przez P_a tę parabolę (o pionowej osi), która przechodzi przez punkt $(0,1)$ i jest styczna do osi OX w punkcie $(a,0)$. Niech B oznacza sumę łuków tych parabol łączących punkty $(0,1)$ i $(a,0)$, to znaczy
$$B = \bigcup_{a\in A} \Big(P_a \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad 0 \leqslant x \leqslant a\}\Big).$$
Udowodnić, że $\lambda_2(B) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1(A) = 0$.

---

5. (25p) Niech $H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad x > 0\}$ oznacza prawą półpłaszczyznę otwartą. Dla dowolnych punktów (a,b), $(u,v) \in H^+$ definiujemy „iloczyn" $(a,b)\circ(u,v) = (au, av+b)$. Znaleźć taką funkcję ciągłą $\varrho\colon H^+ \to (0,\infty)$, całkowalną na każdym podzbiorze zwartym H^+, że dla każdego punktu $\mathbf{p} \in H^+$ i dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset H^+$ zachodzi równość
$$\mu_\varrho(A) = \mu_\varrho(\mathbf{p}\circ A),$$
gdzie $\mathbf{p}\circ A = \{\mathbf{p}\circ\mathbf{x}\colon \quad \mathbf{x} \in A\}$, $\mu_\varrho(A) = \int_A \varrho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.